Городская математическая олимпиада. 6 класс. Детско-юношеский центр «Единство». 4 мая 2017 года.

1. В ряд выписаны 10 двоек. Можно ли поставить между некоторыми из них знаки сложения, вычитания, умножения и скобки так, чтобы в результате получилось 100?

2. Дети, собиравшие в лесу грибы, идут домой парами. В каждой паре – мальчик и девочка, причем у мальчика число грибов или в 2 раза больше, или в 8 раз меньше, чем у девочки. Могли ли все они вместе собрать ровно 2017 грибов?

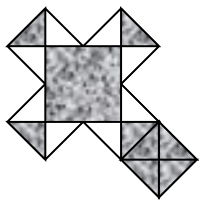
3. Можно ли клетки таблицы 100 x 100 заполнить числами 0, 1 и 2 таким образом, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и диагоналям (состоящим из 100 клеток) были различны?

4. Куб со стороной 10 см оклеили шестью квадратами общей площадью 600 см^2. Обязательно ли все эти квадраты равны?

5. 200 конфет разложены по 100 коробкам (среди коробок могут быть пустые). Катя и Миша по очереди (сначала - Катя) съедают по одной конфете. Верно ли, что независимо от распределения конфет по коробкам Миша может выбирать конфеты так, чтобы две последние конфеты остались в одной коробке?

Решения.

1. Ответ: можно. Например, $100 = 22 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$.
2. Нет. Пусть x грибов нашёл тот, кто нашёл меньше (из данной пары), тогда 2x или 8x нашёл другой ребёнок в паре. В сумме 3x или 9x, то есть количество найденных грибов парой детей делится на 3. С другой стороны, 2017 на 3 не делится.
3. Ответ: нельзя. Имеется 201 различная сумма (от 0 до 200). Всего рядов 202 (100 строк, 100 столбцов, 2 диагонали). 202 > 201. Значит, в каких-то рядах суммы одинаковы.
4. Ответ: не обязательно. Контрпример на рисунке (два квадрата площади вдвое больше, чем площадь грани, и четыре квадрата площади вдвое меньше, чем площадь грани).

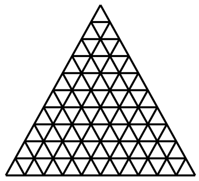


5. Ответ: верно. Миша после каждого хода выбрасывает одну из коробок (свободную или освобождённую его ходом). Сначала перед его ходом 199 конфет и 100 коробок, значит (рассуждаем от противного), есть коробка, в которой не больше одной конфеты. После того, как Катя и Миша сделали по ходу, осталось 99 коробок и $2 \cdot 99$ конфет. Если перед ходом Миши осталось k коробок, то, нетрудно видеть, что конфет осталось ровно 2k-1. Действуя таким образом, Миша оставит одну коробку с двумя конфетами и выиграет.

Городская математическая олимпиада. 7 класс. Детско-юношеский центр «Единство». 4 мая 2017 года.

1. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC (AB = BC) взяли точки N и M (N ближе к B, чем M) такие, что NM = AM и $\angle MAC = \angle BAN$. Найдите $\angle CAN$.

2. Мишень в форме равностороннего треугольника прямыми, параллельными сторонам, разбита на 100 равных равносторонних треугольников со стороной 1. Ваня стреляет по мишени. Он целится в один из маленьких треугольников и попадает или в него, или в один из соседних с ним по стороне. Ваня видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. За каждый маленький треугольник, в который попал ровно 5 раз, Ваня получает 1 рубль. Какую наибольшую сумму он может гарантированно заработать?



3. Является ли число 8 999 999 простым?

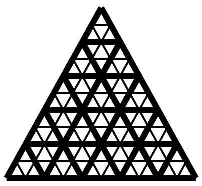
4. Клетки прямоугольной доски размером 9 х 15 раскрашены в белый и черный цвета. У каждой белой клетки, не граничащей со сторонами доски, среди восьми ее соседей ровно пять окрашено в черный цвет, а у каждой черной клетки, не граничащей со сторонами доски, ровно четыре белых соседних клетки. Сколько всего белых клеток на этой доске? (Соседними считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину.)

5. Существует ли 10 несократимых дробей, произведение любых двух из которых – целое число?

Решения.

1. Пусть $\angle MAC = \angle BAN = \alpha$, $\angle NAM = \beta$, тогда из равнобедренного треугольника AMN следует $\angle ANM = \beta$. С одной стороны, $\angle C = \angle BAC = 2\alpha+\beta$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC, с другой стороны $\angle C = 180^0-\alpha-2\beta$ по теореме о сумме углов треугольника CAN. Приравнивая и решая уравнение, находим $\angle CAN = \alpha+\beta = 60^0$.

2. 25 рублей. Разобьем мишень на 25 равных треугольников со стороной 2 (см. рис.), в каждом по 4 маленьких треугольника. Стреляя в центр каждого из 25 треугольников, Ваня может добиться, что в одном из четырёх маленьких треугольников накопится ровно 5 попаданий. Если, стреляя куда угодно, он будет попадать только в 25 треугольников, центральных в каждой из 25 частей (а в остальные ни попадет ни разу), он заработает не больше 25 рублей.



3. Ответ: не является. 8 999 999 = 9 000 000 - 1 = $3000^2 - 1^2 = (3000 - 1)(3000 + 1)$.
Комментарий. 2999 и 3001 - простые числа.

4. Ответ: 60. Разобьём доску на 15 квадратов 3 х 3 и рассмотрим центральные клетки этих квадратов. Независимо от того, какого цвета центральные клетки, в соответствующих квадратах 3 х 3 ровно по 5 чёрных клеток. Значит, всего чёрных клеток $5 \cdot 15 = 75$. Все остальные клетки белые.

5. Ответ: существует. Они имеют вид $p_1p_2...p_{10}/p_i^2$ (i = 1, 2, ..., 10), где $p_1, p_2, ..., p_{10}$ - различные простые числа. (Всё числители дробей равны одному и тому же произведению десяти различных простых чисел, а в знаменателях - по квадрату одного из простых чисел этой десятки.) Тогда все дроби различны, а произведение числителей любых двух дробей делится на произведение знаменателей.

Городская математическая олимпиада. 8 класс. Детско-юношеский центр «Единство». 4 мая 2017 года.

1. Расположите числа от 1 до 2017 в строку (каждое число должно быть выписано ровно один раз) так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 3 или 4.

2. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите угол ABC, если AC=2AB.

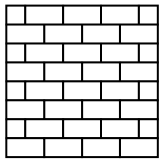
3. На плоскости отметили 100 точек, затем каждые две из них соединили отрезком. Какое наибольшее число таких отрезков может пересечь прямая, которая не проходит ни через одну из отмеченных точек?

4. Двое играющих по очереди красят клетки квадрата 8 х 8. За один ход игрок красит своим цветом одну клетку: начинающий в красный цвет, его соперник - в синий. Перекрашивать покрашенные клетки нельзя. Начинающий стремится закрасить в красный цвет квадрат 2 х 2. Может ли соперник ему помешать?

5. Решите уравнение в натуральных числах: $(3b+a)^2+(3c+a+1)^2+(3d+a+2)^2=2017$.

Решения.

1. Сначала расставим первые 7 чисел начиная с наименьшего (т. е. единицы) и заметим, что следующим можно поставить наименьшее из оставшихся (т. е. 8): 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, ... Пусть числа от 1 до 7k расставлены, причём на следующее место можно поставить число 7k+1. Но тогда можно поставить и следующую семёрку чисел: ..., 7k+1, 7k+5, 7k+2, 7k+6, 7k+3, 7k+7, 7k+4, после которой есть место для числа 7(k+1)+1. Действуя таким образом (т. е. разбивая числа на семёрки {1, 2, ..., 7}, {8, 9, ..., 14}, ... и расставляя числа в семёрках в указанном выше порядке, мы расставим все числа, так как 2017 даёт остаток 1 при делении на 7 (2017 = 7 · 288 + 1).
2. Ответ: 90^0. Пусть отрезок ED симметричен EB относительно AE. Так как AE – биссектриса, точка D лежит на прямой AC. Треугольники ABE и ADE равны как симметричные, значит, AD=AB=AC/2=DC, т.е. ED - медиана треугольника AEC. Так как треугольник AEC равнобедренный, его медиана является высотой, т.е. угол ADE равен 90^0. Тогда и угол ABC равен 90^0.



3. Ответ: через 2500. Пусть проведена прямая, и a точек оказалось в одной из полуплоскостей. Тогда в другой полуплоскости 100-a точек. $a(100-a) \le 2500$, потому что это неравенство равносильно неравенству $0 \le (50 - a)^2$. Пример: на двух параллельных прямых по 50 точек, а прямая, которая пересекает отрезки, расположена между параллельными прямыми.
4. Ответ: может. Для этого он красит вторую клетку прямоугольника 1 х 2 (см. рис.) или (в ответ на ход не в прямоугольник) также ходит не в прямоугольник. Так как каждый квадрат 2 х 2 содержит прямоугольник, то в нем будут оба цвета.
5. Нетрудно видеть, что разность любых двух скобок не делится на 3. Значит, скобки в каком-то порядке дают остатки 0, 1, 2 при делении на 3. Квадраты скобок дают остатки 0, 1, 1 при делении на 3. Сумма квадратов скобок даёт остаток 2 при делении на 3. но 2016 делится на 3 по признаку, а значит. 2017 даёт остаток 1 при делении на 3. Решений нет.

Городская математическая олимпиада. 9 класс. Детско-юношеский центр «Единство». 4 мая 2017 года.

1. Числа $1/(a+b)$, $1/(a+c)$ и $1/(b+c)$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа a^2, b^2 и c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

2. ABCDEFGHKLMN - правильный 12-угольник. Докажите, что прямые AE, BF, CH, DM проходят через одну точку.

3. На доске записаны многочлены $P(x)=x^2+3$, $Q(x)=x-1$ и $R(x)=x^2+2x+1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух многочленов, уже выписанных на доску. Может ли на доске когда-нибудь появиться многочлен $F(x)=x^3+2017$?

4. Несколько клеток белого бесконечного клетчатого листа бумаги покрашены в чёрный цвет. Раз в минуту происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу. Новый цвет клетки совпадает с цветом, в который было покрашено большинство из следующих трёх клеток: самой клетки, её соседа слева и соседа снизу. Докажите, что рано или поздно чёрные клетки исчезнут.

5. a, b, c, d - натуральные числа. $a + b + c + d = 2009$. Какое наименьшее значение может принимать наименьшее общее кратное чисел a, b, c, d?

Решения.

1. По условию $1/(a+b)+1/(b+c)=2/(a+c)$, домножим на $(a+b)(a+c)(b+c)$ и приведем подобные. Получим что и требовалось: $a^2+c^2=2b^2$.
2. Рассмотрим треугольник BDH. В нём BF, CH, DM - биссектрисы, а значит, проходят через одну точку. Аналогично, AE, CH, DM - биссектрисы в треугольнике CEM. Значит, все 4 прямые проходят через точку пересечения CH и DM.
3. Нет. Заметим, что $P(1)=4$, $Q(1)=0$ и $R(1)=4$ делятся на 4. Поэтому на доске могут быть лишь многочлены, у которых при $x=1$ значение кратно 4. Но $F(1)=2018$ даёт остаток 2 при делении на 4.
4. Ясно, что если обвести все черные клетки прямоугольной границей по линиям сетки, то черный цвет никогда не выйдет за границу. Также ясно, что если мы закрасим весь прямоугольник в черный цвет, то после этого общее число черных клеток будет не меньше, чем было, в любой момент. Но такой прямоугольник исчезнет («по диагоналям»).
5. Ответ: 574. Пример: 287, 574, 574, 574. Оценка: пусть $a+b+c+d=2009$, $a\le b\le c\le d$, $N=\text{НОК}(a, b, c, d)$. Заметим, что не все из чисел a, b, c, d равны (так как 2009 не кратно 4). Тогда каждое из чисел $2a$, b, c, d не больше N (выпишите неравенства). Умножая первое неравенство на ½ и складывая с остальными, получим $a+b+c+d\le 7N/2$, или $N\ge 574$.

Городская математическая олимпиада. 10 класс. Детско-юношеский центр «Единство». 4 мая 2017 года.

1. В треугольной пирамиде SABC $\angle SAB > \angle SBA$, $\angle SBC > \angle SCB$. Сравните $\angle SAC$ и $\angle SCA$.

2. Про квадратные трехчлены f и g известно, что они имеют корни, а f - g не имеет корней. Докажите, что f + g имеет корни.

3. Сколько существует восьмизначных чисел таких, что после вычеркивания любой цифры из числа получается число, которое делится на 3?

4. Можно ли прямоугольный параллелепипед, имеющий размеры $2^{10} \times 3^{10} \times 5^{10}$, заполнить кирпичами 4 x 5 x 10?

5. Решите уравнение в натуральных числах: $a^2+b^2+c^2=2^{2017}$.

Решения.

1. Применим следствие из теоремы синусов: в треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона, а напротив большей стороны - больший угол. По условию SB > SA, SC > SB, значит, SC > SA и $\angle SAC > \angle SCA$.
2. От противного. Пусть у f+g тоже нет корней. Тогда или графики обоих трехчленов f+g и f-g лежат по одну сторону от оси абсцисс (но тогда их полусумма f не имеет корней), или по разную (но тогда их полуразность g не имеет корней).
3. Каждая вычеркнутая цифра даёт тот же остаток при делении на 3, что и само число. Значит, остаток у всех цифр одинаковый. Семь таких цифр в сумме делятся на 3. Значит, остаток равен 0. Цифрами числа являются 0, 3, 6, 9. На первом месте может стоять только 3, 6 или 9, на каждом из остальных - 0, 3, 6 или 9. Количество способов составить число равно $3 \cdot 4^7 = 49152$.
4. Ответ: нельзя. Грань $3^{10} \times 5^{10}$ имеет нечётную площадь. Пусть мы заполнили её гранями кирпичей, которые к ней примыкают. Но площади всех граней кирпичей чётные.
5. Нет решений. От противного: a, b, c - решение. Тогда или все a, b, c четны, или два нечетны, а одно четно. Пусть a, b нечетны, а c четно. Тогда левая часть дает остаток 2 при делении на 4, а правая делится на 4. Значит, все a, b, c четны: $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$ и $a_1^2+b_1^2+c_1^2=2^{2015}$. Аналогично рассуждая, получим $a_{1008}^2+b_{1008}^2+c_{1008}^2=2$, не имеющее решений в натуральных числах.